Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Matematično-fizikalni praktikum

Druga naloga: Naključni sprehodi

Simon Bukovšek, 28211067

Mainz, 18. oktober 2023

Profesor: prof. dr. Borut Paul Kerševan

Naloga: Naključni sprehodi

Napravi računalniško simulacijo dvorazsežne naključne hoje za **polete in sprehode**. Začni vedno v izhodišču ($x = y = 0$), nato pa določi naslednjo lego tako, da naključno izbereš smer koraka in statistično neodvisno od te izbire še njegovo dolžino, torej $p(l) \propto l^{-\mu}$. V vsakem primeru nariši nekaj značilnih slik sprehodov za 10, 100, 1000 in 10 000 korakov. Iz velikega števila sprehodov z velikim številom korakov nato poskusi določiti eksponent γ za nekaj izbranih parametrov μ oziroma funkcij $f(x)$ v posameznih primerih ter presodi, za kakšno vrsto difuzije gre.

1 Uvod

Naključni sprehod je proces, pri katerem se delci gibljejo po prostoru, z vsakim korakom v naključno smer. Z običajnim naključnim sprehodom, kjer je vsak korak enako dolg in vzame enako časa, lahko modeliramo difuzijsko enačbo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\nabla^2 \rho.$$

Pri običajnem naključnem sprehodu je varianca oddaljenosti od izhodišča sorazmerna s številom korakov oziroma časom sprehoda:

$$\sigma^2(t) \equiv \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = 2Dt\,, \tag{1}$$

kar sledi iz centralnega limitnega izreka. Nas pa bo zanimala *anomalna difuzija*, pri kateri dolžine korakov niso fiksne − še več, porazdelitev dolžin ima *debele repe*. To pomeni, da njihova varianca morda ne obstaja oziroma je neskončna, zato za izpeljavo Enačbe (1) ne moremo uporabiti centralnega limitnega izreka.

Zanimali nas bodo naključni sprehodi, pri katerih je porazdelitev dolžin korakov oblike

$$p(l) \propto l^{-\mu}, \tag{2}$$

pri čemer je $1 < \mu < 3$.

Ustrezno sliko naključnega gibanja, povezanega s temi dolgimi koraki, lahko interpretiramo na dva načina:

- Lévyjev pobeg oz. polet (*flight*), implicira, da vsak korak iz porazdelitve traja enako dolgo, medtem ko se hitrost gibanja med koraki (divje) spreminja.
- Lévyjev sprehod (*walk*), ki interpretira korak iz porazdelitve kot gibanje s konstantno hitrostjo in tako koraki trajajo različno dolgo časa (dolžina koraka je sorazmerna s časom).

Pri anomalni difuziji razmazanost (varianca) velike množice končnih leg naključnih Lévyjevih **sprehodov (walks)** narašča z drugačno potenco časa. Velja $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$, kjer je

$$\begin{aligned} 1 < \mu < 2\,, &\quad \gamma = 2 && \text{(balistični režim)}\,, \\ 2 < \mu < 3\,, &\quad \gamma = 4 - \mu && \text{(super-difuzivni režim)}\,, \\ \mu > 3\,, &\quad \gamma = 1 && \text{(normalna difuzija)}\,. \end{aligned}$$

Za $\mu = 2$ pričakujemo $\sigma^2(t) \sim t^2/\ln t$, za $\mu = 3$ pa $\sigma^2(t) \sim t \ln t$.

Slika je nekoliko drugačna pri opazovanju naključnih Lévyjevih **poletov (flights)**. Spet vzamemo zvezo $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$ in dobimo odvisnosti

$$\begin{aligned} 1 < \mu < 3\,, &\quad \gamma = \frac{2}{\mu - 1} && \text{(super-difuzivni režim)}\,, \\ \mu > 3\,, &\quad \gamma = 1 && \text{(normalna difuzija)}\,. \end{aligned}$$

Pri $\mu = 2$ očitno pričakujemo $\sigma^2(t) \sim t^2$, torej balistični režim.

2 Lévyjevi poleti in sprehodi

2.1 Kvalitativni opis

Preden se lotimo resnega računanja Lévyjevih sprehodov in poletov, si najprej poglejmo, s čim imamo sploh opravka.

Za izbiranje dolžin korakov sem uporabil Paretovo porazdelitev, ki je definirana kot:

$$p(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}\,, \tag{3}$$

kjer je x_m minimalni možni izid, α pa parameter porazdelitve. Za naše simulacije je bil x_m vedno enak 1, α pa je bil enak $\mu - 1$. Kumulativna porazdelitev je potemtakem:

$$P(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha\,.$$

Za generiranje naključnih števil iz te porazdelitve sem uporabil inverzno transformacijsko metodo (ICDF). Najprej sem generiral naključno število $y \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ iz enakomerne porazdelitve na intervalu $[0,1]$, nato pa sem izračunal inverzno transformacijo:

$$x = x_m \left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/\alpha} .$$

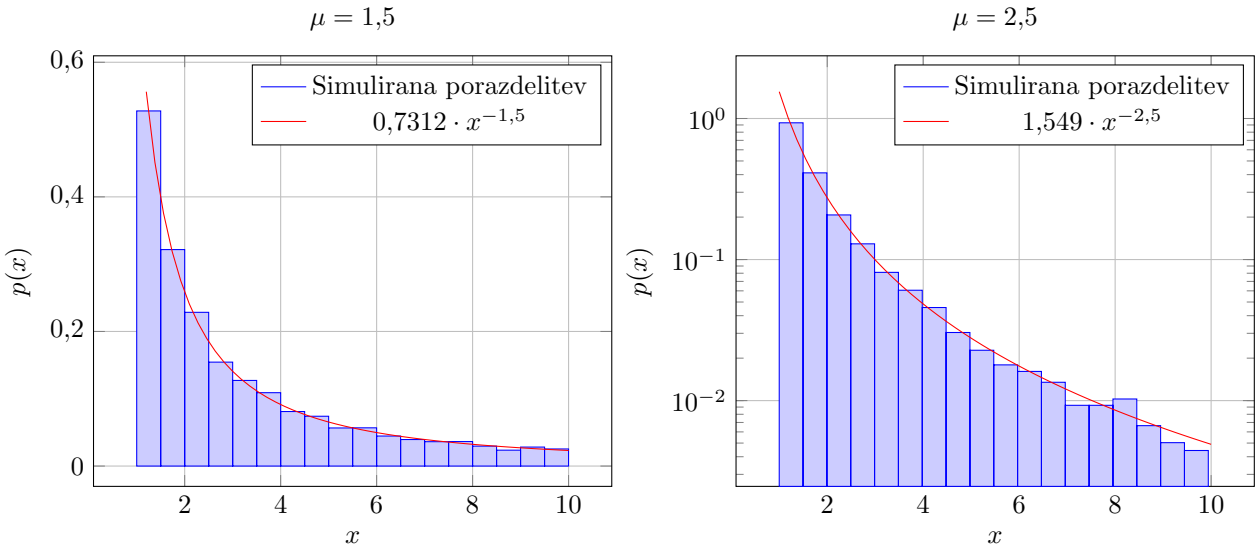
Dolžine so bile torej računane po formuli:

$$l = (1-y)^{-\frac{1}{\mu-1}} .$$

Število y sem žrebal s pomočjo funkcije `rand` iz knjižnice `numpy.random` v programskem jeziku Python. *Teoretični kometar*: če bi se želel izogniti zares velikim številom, ki lahko nastopijo pri potenčni porazdelitvi zlasti pri majhnih μ, bi se lahko omejil na interval $[a,b]$, kjer bi bil $b \approx 1000$ in $a = 1$. V tem primeru bi moral uporabiti nekoliko bolj zapleteno funkcijo vzorčenja:

$$l = \left(y(b^{1-\mu} - a^{1-\mu}) + a^{1-\mu}\right)^{-\frac{1}{\mu-1}} . \tag{4}$$

Na Slikah 1a in 1b je prikazano vzorčenje po Paretovi porazdelitvi za $\mu = 1{,}5$ in $\mu = 2{,}5$ na intervalu $[1,10]$. Vidimo, da ima večina korakov dolžine ne več kot 5, obenem pa lahko vidimo še eno interpretacijo "dolgih repov". Na Sliki 1b rdeča krivulja ne pada linearno (kot bi za eksponentno porazdelitev), ampak logaritemsko. Obenem pa nam sliki zagotavljata, da naš program deluje v redu.

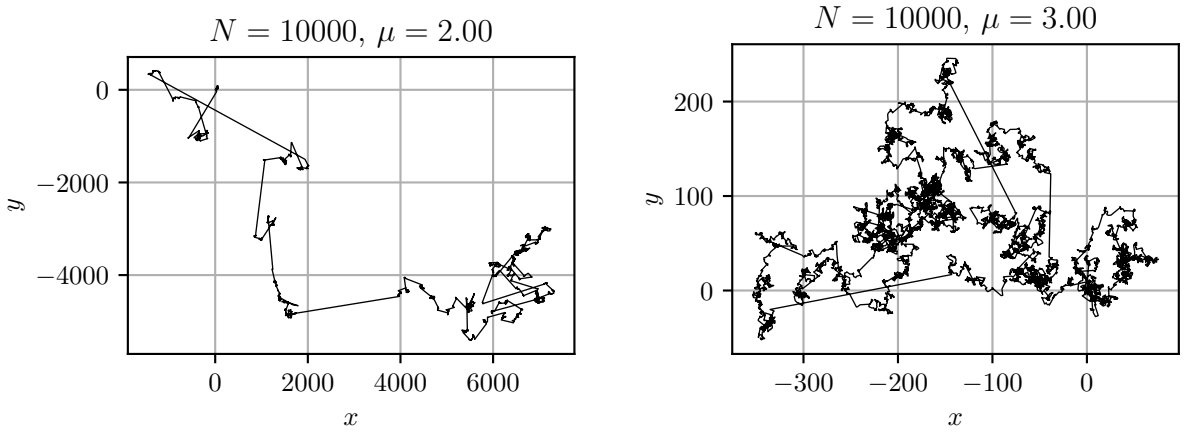


(a) Prikaz 10 000 žrebanih podatkov s pomočjo Formule (4) za $\mu = 1{,}5$ in primerjava z analitično porazdelitvijo (rdeče). Število $0{,}7312 = \sqrt{10}/(2\sqrt{10}-2)$ je normalizacijska konstanta.

(b) Prikaz 10 000 žrebanih podatkov s pomočjo Formule (4) za $\mu = 2{,}5$ in primerjava z analitično porazdelitvijo (rdeče). Število $1{,}549 = 150\sqrt{10}/(10\sqrt{10}-1)$ je normalizacijska konstanta. Zaradi preglednosti je graf prikazan na logaritemski skali.

Slika 1: Primera Paretove porazdelitve.

Narišimo si naključni sprehod za parameter $\mu = 3$ in $\mu = 2$ z 10 000 koraki. Rezultati so prikazani na Sliki 2. Razmislimo, ali nam sliki lahko kaj zanimivega razkrijeta. Razvidno je, da se graf 2a razteza na približno stokrat večjem območju kot graf 2b. To gre pripisati dejstvu, da je povprečna dolžina koraka v primeru $\mu = 3$ enaka 2, v primeru $\mu = 2$ pa je neskončna. Drugo opažanje se nanaša na razmerje med povprečnim in najdaljšim korakom. V primeru $\mu = 2$ večino poti opravi nekaj zelo dolgih korakov, ki so po velikosti več redov velikosti večji od povprečnih korakov. Večina korakov je v primerjavi tako majhnih, da se vidijo le kot črne zgoščine na koncih daljših daljic. V primeru $\mu = 3$ je sicer še vedno mogoče opaziti nekaj daljših korakov, vendar so na celotni sliki le trije in nimajo tako velikega prispevka k skupni oddaljenosti od izhodišča.



(a) Naključni sprehod s 10 000 koraki pri $\mu = 2$. Opaziti gre, da so določeni koraki več kot red velikosti daljši od povprečja, kar nakazuje na "debele repe" porazdelitve.

(b) Naključni sprehod s 10 000 koraki pri $\mu = 3$. Sprehod vključuje nekaj nadpovprečno dolgih korakov, vendar so bistveno manj izraziti kot pri $\mu = 2$.

Slika 2: Primera naključnih sprehodov z 10 000 koraki pri različnih vrednostih μ.

2.2 Kvantitativni opis

Sedaj se lotimo natančnejšega računanja. Kot že samo ime pove, je naključni sprehod naključen proces, zato potrebujemo za ustrezno statistično analizo tako sprehode z veliko koraki N kot tudi veliko število ponovitev sprehodov M. Vsi sprehodi so bili izvedeni v dveh dimenzijah.

2.2.1 Statistični komentar

Za računanje sem vselej uporabili sprehode dolge $N = 10\,000$ korakov, MAD sem računal na $M = 1000$ vzorcih, napako pa sem ocenil iz $O = 10$ ponovitev 1000 vzorcev. Tako za Lévyjeve polete kot sprehode velja

$$\sigma^2(|\mathbf{r}(t)|) \propto t^{-\gamma},$$

kjer je γ neka funkcija parametra μ. Zaradi debelih repov porazdelitve (2) pa pričakujemo, da varianca ne bo dobra statistika za opis anomalne difuzije, saj imajo ubežniki (ali osamelci) nanjo preveč vpliva. Lahko bi namerno črtal nekaj odstotkov najdaljših korakov, vendar sem se odločil za drugo, robustnejšo metodo. Za vsak čas t sem izračunal *mediano absolutne deviacije* (MAD, angl. *median absolute deviation*) oddaljenosti od izhodišča po formuli:

$$\mathrm{MAD}(x) = \mathrm{Med}(|x - \mathrm{Med}(x)|),$$

kjer je x nabor vseh oddaljenosti ob istem času. Za porazdelitve z varianco velja:

$$\mathrm{MAD}(x)^2 \propto \sigma(x)^2,$$

zatorej

$$\mathrm{MAD}(t)^2 \propto t^{\gamma}$$

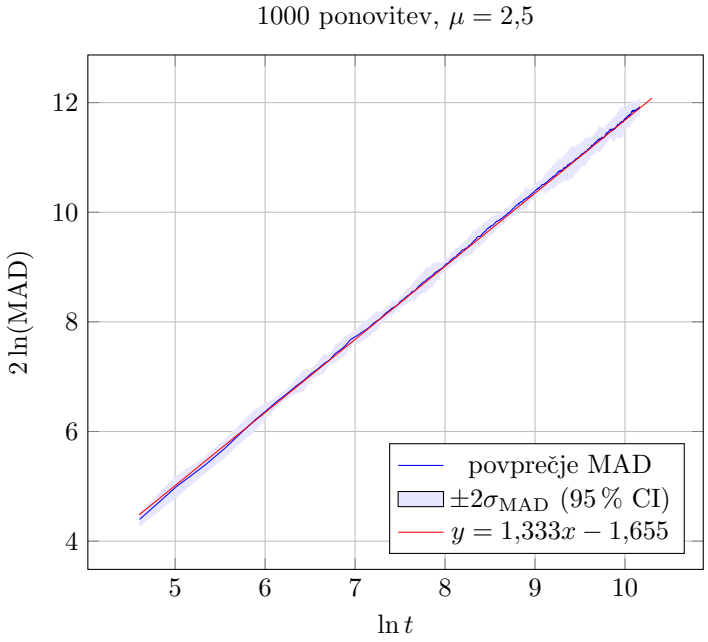
in

$$2 \ln \mathrm{MAD} = \gamma \ln t + c.$$

Vrednost γ sem določil z linearno regresijo s pomočjo funkcije `curve_fit` iz knjižnice `scipy.optimize`. Za oceno napake sem vse ponovitve razdelili v deset skupin in za vsako izračunali $2 \ln \mathrm{MAD}$, nato pa izračunali povprečje in standardno deviacijo σ_{MAD} vseh desetih vrednosti. Vzel sem podatke od stotega koraka naprej. Regresija je prikazana na Sliki 3.

Vrednosti prileganja ($y = kx + n$) sta sledeči:

$$k = 1{,}333\,03 \pm 0{,}003\,52,$$



Slika 3: Primer določanja eksponenta γ za Lévyjeve sprehode. V tem primeru gre za 10 000 ponovitev Lévyjev sprehodov z 10 000 koraki in $\mu = 2{,}5$. Sprehodi so bili razdeljeni v 10 skupin; vsaki sem izračunal MAD oddaljenosti od izhodišča ob času t. Na grafu je z modro črto prikazano povprečje MAD-ov, z rdečo pa linearna regresija. S svetlo modro barvo je označeno območje $\pm 2\sigma_{\mathrm{MAD}}$, ki predstavlja 95 % interval zaupanja.

$$n = -1{,}655\,49 \pm 0{,}031\,65.$$

Kot lahko opazimo, je absolutna napaka za vse podatke približno enako velika, kar podpira tudi teorija. Če predpostavimo, da so podatki normalno porazdeljeni, lahko izračunamo (ali pa vsaj približno ocenimo) napako posameznega podatka. Za normalno porazdelitev velja $\sigma = 1{,}4826 \cdot \mathrm{MAD}$ in

$$\mathrm{Var}[S^2] = \frac{2\sigma^4}{N-1}.$$

Ocena je torej:

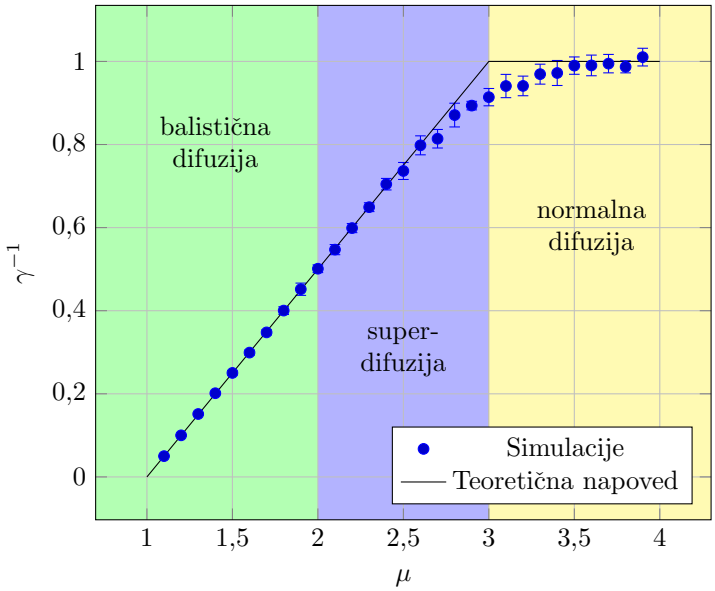
$$\Delta(2\ln \mathrm{MAD}) = \frac{\Delta(\mathrm{MAD}^2)}{\mathrm{MAD}^2} = \frac{\Delta(\sigma^2)}{\sigma^2} \approx \sqrt{\frac{2}{N-1}}.$$

Morda je za ocena za kak majhen faktor različna od resnice, razkriva pa dejstvo, da je napaka neodvisna od same vrednosti $2\ln \mathrm{MAD}$. Če ima vsak podatek enako napako, je naklon regresijske premice enak, kot če napake sploh ne podamo (to sem preveril in drži). Edino, kar se spremeni, je napaka v naklonu, ki je manjša, če napak podatkov ne podamo. Kljub vsemu pa je razpršenost končnih vrednosti γ po več ponovitvah postopka prileganja na različnih podatkih večja, kot to nakazuje napaka v koeficientu premice. Zaradi tega opažanja sem se odločil, da na bom ocenjeval napak MAD, temveč bom napako γ ocenil tako, da bom celotno simulacijo, regresijo in izračun γ ponovil večkrat in na podlagi vzorca več izračunanih γ ugotavljal povprečje in napako. Četudi to ni najbolj običajna metoda, vseeno najbolje oceni napako na rezultatih.

2.2.2 Lévyjevi poleti

Lévyjevi poleti so računsko enostavnejši (četudi fizikalno manj smiselni), saj predpostavljajo, da vsak korak traja enako količino časa ne glede na fizično dolžino. Na koncu vsakega koraka sem izračunal oddaljenost od izhodišča. Po tisoč ponovitvah sem izračunal MADe in γ. To sem 10-krat ponovil, da sem dobil povprečje in napako. Rezultati so prikazani na Sliki 4 in v Tabeli 1.

Zaradi lepšega prikaza je na grafu prikazana odvisnost vrednosti γ^{-1} v odvisnosti od μ. Graf je opremljen z napakami (angl. *error bars*), vendar so nekatere tako majhne, da jih program ni izrisal.



Slika 4: Odvisnost γ^{-1} od μ za Lévyjeve polete. V tem primeru gre za 10000 ponovitev Lévyjevih sprehodov z 10 000 koraki, razdeljenih v deset skupin. Zaradi lepše slike je prikazana odvisnost γ^{-1} namesto γ. Graf je opremljen z napakami, vendar so na mestih premajhne za prikaz. V ta namen je spodaj podana še Tabela 1 s točnimi vrednostmi.

μ	γ (simulacija)	γ (teorija)
1,1	$19{,}98 \pm 0{,}29$	20
1,2	$9{,}99 \pm 0{,}15$	10
1,3	$6{,}60 \pm 0{,}11$	6,67
1,4	$4{,}96 \pm 0{,}10$	5
1,5	$4{,}00 \pm 0{,}09$	4

Tabela 1: Nekaj vrednosti simuliranih izračunov γ v bližini $\mu = 1$, saj iz Grafa 4 ni dovolj razvidna natančnost.

Pomembno je omeniti, da so te napake vseeno večje (za približno faktor 10), kot bi jih dobili, če bi napake že vnesli v program za prileganje premice in gledali napako fita. Opazimo precej lepo ujemanje med teorijo in simulacijami na območju, ki ni preveč blizu $\mu = 3$. V tisti točki namreč nastane težava, saj potenčna odvisnost med σ in t ne velja več. Več o tem v nadaljevanju.

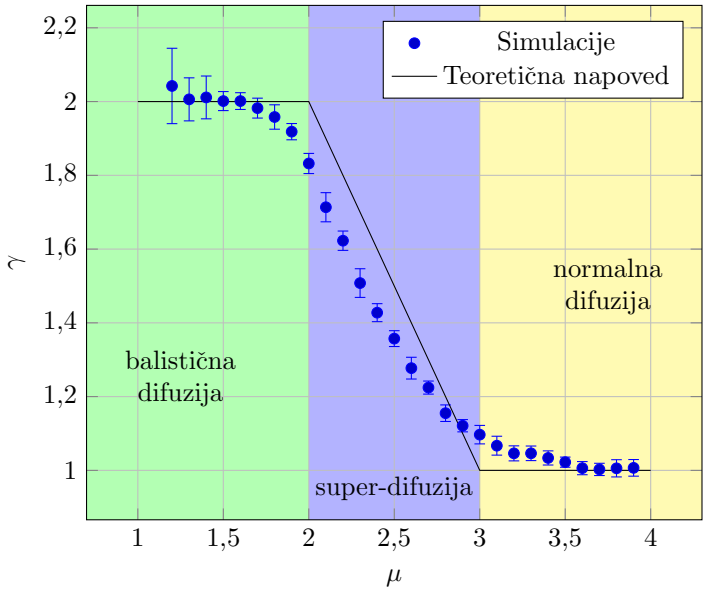
2.2.3 Lévyjevi sprehodi

Pri Lévyjevih sprehodih vsak korak traja sorazmerno tako dolgo, kot je dolg. To nekoliko spremeni odvisnost $\gamma(\mu)$, hkrati pa spremeni tudi računski pristop. Ko računamo MAD, morajo biti vse razdalje podane ob istem času. Pri sprehodih vsak korak traja različno dolgo, zato je potrebna linearna interpolacija. Če je delec ob času t_1 na poziciji $\mathbf{r}_1$ in ob t_2 na poziciji $\mathbf{r}_2$, potem je ob času $t_1 \leq t \leq t_2$ na poziciji

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\mathbf{r}_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\mathbf{r}_2.$$

Za časovne točke sem si izbral 300 enakomerno porazdeljenih časov od začetka do konca najkrajšega sprehoda. Prvih sto časovnih točk sem pri linearni regresiji izpustil.

Za večjo učinkovitost in hitrost programa sem simultano generiral in analiziral po 1000 sprehodov. Vmesne rezultate sem shranil v `numpy` seznam in večino časovno potratnih operacij izvedel s pomočjo funkcij, implementiranih v `numpy`-ju. Ker je Python interpretiran programski jezik, so lahko zanke časovno zelo potratne, zato se pogosto splača uporabljati `numpy`, ki je implementiran v Fortranu in C-ju in je zavoljo tega sposoben hitrejšega operiranja z več-dimenzionalnimi seznami.



Slika 5: Odvisnost γ od μ za Lévyjeve sprehode. V tem primeru gre za 10000 ponovitev Lévyjevih sprehodov z 10 000 koraki, razdeljenih v deset skupin za namen izračuna napake.

Na Sliki 5 so prikazani rezultati simulacij za različne vrednosti μ.

Opazimo lahko, da simulacije zavzamejo splošen trend, kot ga narekuje teorija, težko pa rečemo, da gre za popolno ujemanje. Med $1 < \mu < 1{,}7$ in $\mu > 3{,}5$ je teoretična napoved znotraj negotovosti simulacije. Na vmesnem območju so simulirane vrednosti γ v splošnem manjše od teoretične napovedi. Razlog za to bi lahko bil, da teorija upošteva tudi zelo zelo dolge sprehode, ki močno prispevajo k γ, vendar so tako malo verjetni, da jih moj program ni simuliral. Natančnost v bližini $\mu = 3$ in $\mu = 2$ je pričakovano najslabša, saj sta to točki, v katerih potenčna odvisnost ne velja točno. Omenimo še povečano negotovost rezultatov v bližini $\mu = 1$, ki je predvsem posledica izredno debelih repov porazdelitve.

2.2.4 Posebni primeri

Obravnavajmo še posebna primera za $\mu = 2$ in $\mu = 3$, kjer se zgodi fazni prehod med režimi difuzije. Teorija napoveduje, da namesto potenčne odvisnosti velja naslednje:

$$\mu = 2: \quad \sigma^2(t) \propto t^2 / \ln t,$$

$$\mu = 3: \quad \sigma^2(t) \propto t \ln t.$$

Da bi to preveril, sem poskusil na graf $\mathrm{MAD}^2(t)$ prilegati funkcije $y_1(t) = bt^a$ in $y_2(t) = bt^a \ln t$ oziroma $y_2 = bt^a \ln t$. Rezultati so prikazani na Slikah 6a in 6b.

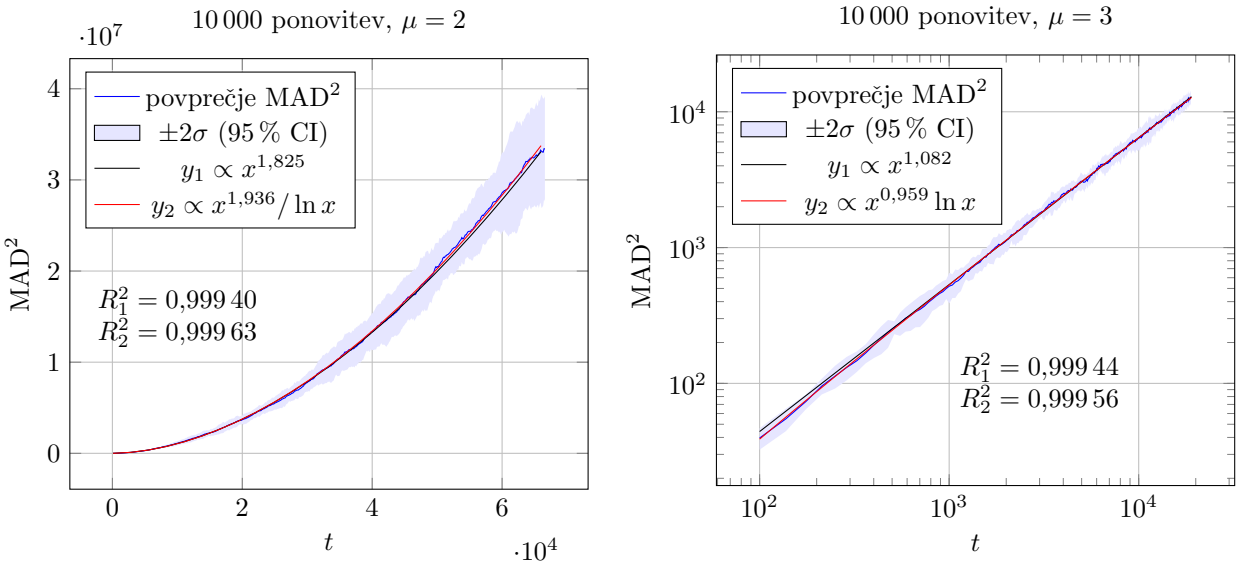
Pričakoval sem, da bo regresija za y_2 v obeh primerih boljša, vendar je izboljšava tako majhna, da je lahko tudi posledica naključja. Kvaliteto regresije sem ocenil z R^2 vrednostjo (angl. *coefficient of determination*), ki se izračuna po formuli

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - f(x_i))^2}{\sum_i (y_i - \overline{y})^2}.$$

Zavzame vrednosti med -1 in 1, pri čemer 1 pomeni popolno ujemanje. Vrednosti so prikazane na grafih (R_1 za y_1 in R_2 za y_2). Glede na to da so podatki razpršeni čez več redov velikosti, pa mogoče ta metrika ni najbolj primerna za ocenjevanje kvalitete regresije. Koeficient γ pa je v obeh primerih opazno boljši za regresijo y_2 – odstopanje od vrednosti iz teorije je namreč za y_2 približno pol manjši kot za y_1. Točne vrednosti z napakami so:

$$\mu = 2: \quad \gamma_{y_1} = 1{,}825 \pm 0{,}004, \quad \gamma_{y_2} = 1{,}936 \pm 0{,}003,$$

$$\mu = 3: \quad \gamma_{y_1} = 1{,}082 \pm 0{,}003, \quad \gamma_{y_2} = 0{,}959 \pm 0{,}004.$$



(a) Prikaz odvisnosti MAD$^2(t)$ za $\mu = 2$. Prilegani sta dve različni regresiji, ki se obe dobro ujemata z simuliranimi podatki. Vrednost γ za regresijo y_2 je dosti bližje teoretični napovedi.

(b) Prikaz odvisnosti MAD$^2(t)$ za $\mu = 3$. Prilegani sta dve različni regresiji, ki se obe dobro ujemata z simuliranimi podatki. Vrednost γ za regresijo y_2 je dosti bližje teoretični napovedi.

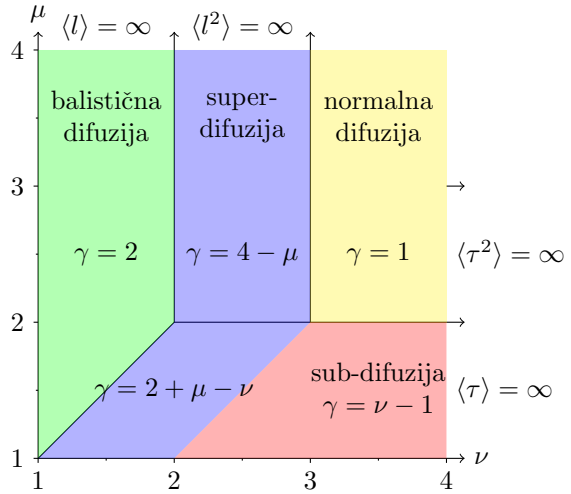
Slika 6: Obravnava posebnih primerov za vrednosti μ, ki določajo prehode med različnimi načini difuzije. En graf je v linearni, drug pa v logaritemski skali, na nobenem pa se ne vidi dobro, katera regresija je boljša.

2.3 Dodatek: "trapping time"

Predpostavimo, da pri Lévyjevem sprehodu na koncu vsakega koraka delec počaka nek čas τ, ki je porazdeljen kot

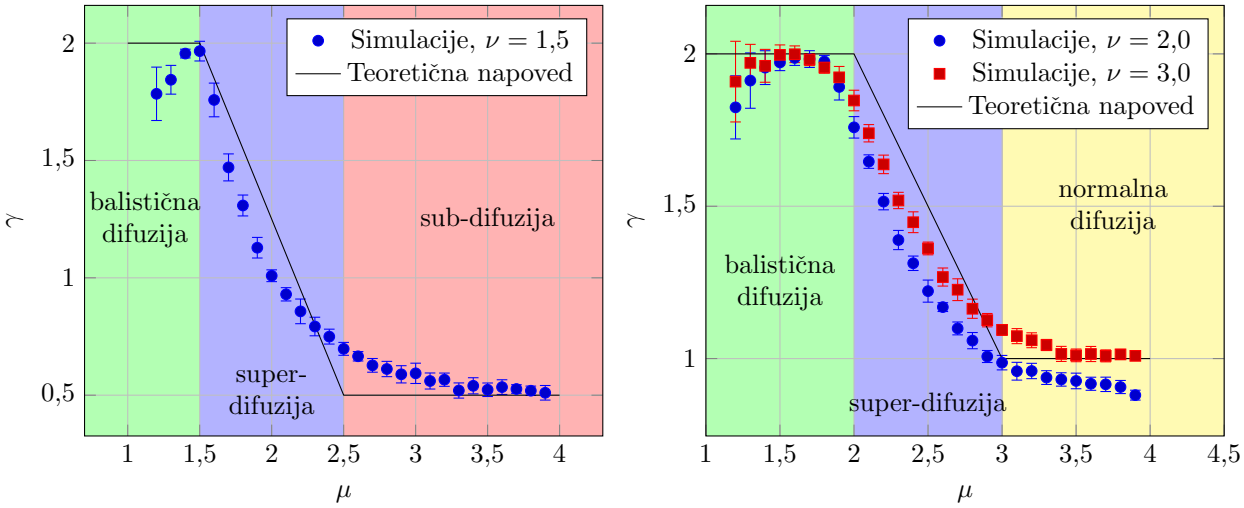
$$p(\tau) \propto \tau^{-\mu}.$$

To nam še nekoliko popestri dogajanje, saj je γ odvisna tako od μ kot tudi od ν. Celotno odvisnost in režime difuzij podaja Graf 7.



Slika 7: Različni režimi difuzije v odvisnosti od parametrov μ in ν.

Celoten postopek je bil identičen kot v primeru z Lévyjevimi sprehodi, edina razlika je seveda dodan čas čakanja med koraki. Osredotočil sem se na tri različne vrednosti parametra $\nu \in [1{,}5, 2, 3]$. Iz simulacij izračunane γ in teoretične napovedi so prikazane na grafih 8a in 8b.



(a) Odvisnost γ od μ za Lévyjeve sprehode. V tem primeru gre za 10000 ponovitev Lévyjevih sprehodov z 10 000 koraki, razdeljenih v deset skupin.

(b) Odvisnost γ od μ za Lévyjeve sprehode.

Slika 8: Prikazi odvisnosti $\gamma(\mu)$ za različne vrednosti ν.

Pri $\nu = 1{,}5$ po teoretičnih napovedih res opazimo pojav sub-difuzije ($\gamma < 1$). Najmanjša natančnost je v točki $\mu = 2{,}5$, kjer, sklepam, ponovno ne velja potenčna odvisnost med časom in MAD. Zanimivo, v točki $\mu = 1{,}5$ (prvi prehod med režimi) pa je za razliko od navadnega sprehoda dosti boljše ujemanje med teorijo in simulacijo. Pri $\nu = 3$ je dajo simulacije praktično zelo podoben rezultat kot pri $\nu = \infty$ (brez čakanja). Pri $\nu = 2$ pa je ujemanje precej slabše, sploh pri $\mu > 3$. Če bi moral ugibati razlog za to, bi rekel, da točke $\nu = 2, \mu > 3$ pravzaprav ležijo na faznem prehodu med normalno difuzijo in sub-difuzijo, in zato zanje ne velja potenčna odvisnost. V vseh treh primerih pa se rezultati simulacije v bližini $\mu = 1$ nenavadno odklonijo navzdol. Če bi želel razjasniti še to, bi moral posvetiti temu projektu še več časa in energije, ki ju pa več nimam.

3 Zaključek

Ta naloga je bila osredotočena na statistično obdelavo stohastičnih procesov, natančneje naključnih sprehodov. Obravnavala je Lévyjeve polete in sprehode in različne režime difuzije, ki so odvisni od parametra porazdelitve dolžine korakov. Za dodatno nalogo je bilo potrebno upoštevati tudi čas postanka po vsakem koraku, ki doda novo dimenzijo v odvisnost $\gamma(\mu, \nu)$.

Zaradi statistične narave problema je natančnost rezultatov močno odvisna od števila ponovitev. Ker pa sem tako časovno kot prostorsko omejen, se je bilo potrebno simulacij lotiti premišljeno in učinkovito. Pythonova knjižnica `numpy` ponuja zelo hitre operacije na matrikah, s čimer se da določene procese tudi paralelizirati. Veliko truda sem vložil v to, da sem večino računskega procesa opravil s pomočjo operacij knjižnice `numpy`. V tem procesu sem se zares dobro naučil, kako zlorabljati (beri: s pridom izkoriščati) `numpy`-jeva pravila za indeksiranje. Na primer, tipično seznamu podamo indeks, kot `seznam[i]`, in nam vrne i-ti element. Knjižnica `numpy` omogoča, da je spremenljivka `i` kakršen koli celoštevilski in poljubno dimenzionalen seznam. Torej, zakaj ne bi bil `i` matrika velikosti 1000×1000. Težko sicer ocenim, koliko časa sem si s tem prihranil, ampak zagotovo lahko rečem, da bi hitreje zaključil, če bi ves ta čas, ko sem se poglabljal v črno luknjo `numpy` dokumentacije, pustil, da teče na hitro napisan počasen program. Vseeno mi *mogoče* utegne to še kdaj koristiti.